

Método de MaxEnt para estados cuánticos invariantes

5ta Jornada de Lógica, Computación e Información Cuántica

César Massri



7 de Junio 2018

Index

- 1 **Medidas Clásicas**
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 **Medidas Cuánticas**
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 **Método MaxEnt**
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 **Conclusiones**

Medidas Clásicas

Medidas

Sea (\mathcal{X}, Σ) un espacio medible. Una *medida* es una función $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$
- 2 $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ para cualquier familia numerable de subconjuntos disjuntos.

Medidas Clásicas

Medidas

Sea (\mathcal{X}, Σ) un espacio medible. Una *medida* es una función $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$
- 2 $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ para cualquier familia numerable de subconjuntos disjuntos.

Teorema de Radon-Nikodym:

Si $\mu(A) = 0$ para todo A de medida (Lebesgue) cero, existe $f \in L(\mathcal{X})$ tal que

$$\mu(A) = \int_A f \, dx$$

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Retículos

Retículo

Un *retículo* es un conjunto ordenado tal que dados dos elementos x, y existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$.

Retículos

Retículo

Un *retículo* es un conjunto ordenado tal que dados dos elementos x, y existe el *ínfimo* $x \wedge y$ y el *supremo* $x \vee y$.

Distributivo

Un retículo X se dice *distributivo* si satisface,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en \mathbb{R}^n , $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en \mathbb{R}^n .

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

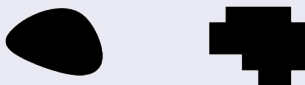
Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en \mathbb{R}^n , $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en \mathbb{R}^n .



Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

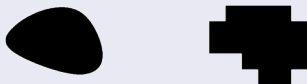
Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en \mathbb{R}^n , $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en \mathbb{R}^n .



Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en \mathbb{R}^n , $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en \mathbb{R}^n .

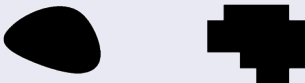


Rota definió una medida (generalizada) en $Poly(n)$ invariante por traslaciones y rotaciones.

Problema de Rota

Generalizar medidas a retículos

Consideremos el retículo de conjuntos Poly-convexos en \mathbb{R}^n , $Poly(n)$. Uniones de convexos compactos en \mathbb{R}^n .



Rota definió una medida (generalizada) en $Poly(n)$ invariante por traslaciones y rotaciones. Probó que las medidas invariantes sobre $Poly(n)$ vienen dadas por funciones S_n -invariantes en n variables. O sea, perímetro, área, volumen, etc.

Medidas en un retículo

Medidas

Sea X un retículo acotado. Una *medida* (real) en X es una función $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1 $\nu(0) = 0$
- 2 $\nu(\bigvee x_i) = \sum \nu(x_i)$ para cualquier familia numerable de elementos disjuntos $x_i \wedge x_j = 0$, tales que $\bigvee x_i \in X$.

Medidas en un retículo

Medidas

Sea X un retículo acotado. Una *medida* (real) en X es una función $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1 $\nu(0) = 0$
- 2 $\nu(\bigvee x_i) = \sum \nu(x_i)$ para cualquier familia numerable de elementos disjuntos $x_i \wedge x_j = 0$, tales que $\bigvee x_i \in X$.

Medidas invariantes

Si un grupo actúa en X , una *medida invariante* es una medida en X/G . O sea, $\nu(gx) = \nu(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$.

Index

- 1 **Medidas Clásicas**
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 **Medidas Cuánticas**
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 **Método MaxEnt**
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 **Conclusiones**

Caracterización de medidas y medidas invariantes sobre retículos

Teorema[HMP]

Dado un retículo acotado X , existe un espacio \mathcal{X} tal que toda medida sobre el retículo X está en biyección con una medida (en el sentido clásico) sobre \mathcal{X} .

Lo mismo sucede para medidas invariantes.

Caracterización de medidas y medidas invariantes sobre retículos

Teorema[HMP]

Dado un retículo acotado X , existe un espacio \mathcal{X} tal que toda medida sobre el retículo X está en biyección con una medida (en el sentido clásico) sobre \mathcal{X} .

Lo mismo sucede para medidas invariantes.

Recordar

- Los estados de la mecánica estadística clásica se pueden pensar como medidas de Kolmogorov.
- Los observables son las variables aleatorias.

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Definiciones

Ortocomplementación

Una *ortocomplementación* en un retículo acotado es una función que manda cada elemento a a su complemento a^\perp satisfaciendo:

- Complemento: $a \vee a^\perp = 1$ y $a \wedge a^\perp = 0$.
- Involución: $(a^\perp)^\perp = a$.
- Orden: si $a \leq b$ entonces $b^\perp \leq a^\perp$.

Retículo ortomodular

Un retículo *ortomodular* \mathcal{L} es un retículo acotado munido de una ortocomplementación tal que

$$a \leq b \implies a \vee (a^\perp \wedge b) = b, \quad \forall a, b \in \mathcal{L}.$$

Medidas ortogonales en un retículo

Medidas ortogonales

Sea \mathcal{L} un retículo ortocomplementado. Una *medida ortogonal* es una función $\nu : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- 1 $\nu(0) = 0$
- 2 $\nu(\bigvee x_j) = \sum_j \nu(x_j)$ para toda familia numerable ortogonal.

Por definición, $x \perp y$ si $x \leq y^\perp$. Si un grupo actúa en \mathcal{L} , una *medida ortogonal invariante* es una medida ortogonal en \mathcal{L}/G . Una *medida positiva (invariante)* es una medida (invariante) cuyos valores son positivos.

Medidas ortogonales en un retículo

Medidas ortogonales

Sea \mathcal{L} un retículo ortocomplementado. Una *medida ortogonal* es una función $\nu : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- 1 $\nu(0) = 0$
- 2 $\nu(\bigvee x_j) = \sum_j \nu(x_j)$ para toda familia numerable ortogonal.

Por definición, $x \perp y$ si $x \leq y^\perp$. Si un grupo actúa en \mathcal{L} , una *medida ortogonal invariante* es una medida ortogonal en \mathcal{L}/G . Una *medida positiva (invariante)* es una medida (invariante) cuyos valores son positivos.

Teorema de Gleason:

Sea $\mathcal{L}_{\mathcal{V}\mathcal{N}}$ el retículo ortomodular de subespacios cerrados en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y sea ν una medida ortogonal positiva en $\mathcal{L}_{\mathcal{V}\mathcal{N}}$. Si $\dim(\mathcal{H}) \geq 3$, entonces existe $\rho \geq 0$ tal que $\nu(P) = \text{tr}(\rho P)$.

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Medidas ortogonales Positivas

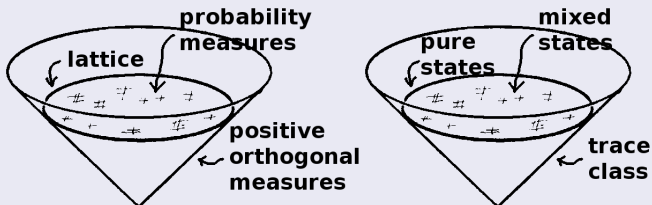
Teorema [HMP]

Sea \mathcal{C} un conjunto generador de \mathcal{L} (rayos). Las medidas ortogonales positivas sobre \mathcal{L} están en biyección con el cono dual de \mathcal{C} . O sea, funcionales ν tales que $\nu(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$.

Medidas ortogonales Positivas

Teorema [HMP]

Sea \mathcal{C} un conjunto generador de \mathcal{L} (rayos). Las medidas ortogonales positivas sobre \mathcal{L} están en biyección con el cono dual de \mathcal{C} . O sea, funcionales ν tales que $\nu(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{C}$.



Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

MaxEnt

Condiciones

Supongamos que tenemos una serie de condiciones y queremos determinar la distribución de probabilidad menos sesgada compatible con estas condiciones.

$$\langle R_1 \rangle = r_1, \langle R_2 \rangle = r_2, \dots, \langle R_n \rangle = r_n.$$

MaxEnt

Condiciones

Supongamos que tenemos una serie de condiciones y queremos determinar la distribución de probabilidad menos sesgada compatible con estas condiciones.

$$\langle R_1 \rangle = r_1, \langle R_2 \rangle = r_2, \dots, \langle R_n \rangle = r_n.$$

MaxEnt

MaxEnt nos dice que

$$\rho_{max-ent} = \exp^{-\lambda_0 \mathbf{1} - \lambda_1 R_1 - \dots - \lambda_n R_n},$$

donde los λ son multiplicadores de Lagrange que satisfacen

$$r_i = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_i}, \quad Z(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{tr} \left(\exp^{-\lambda_1 R_1 - \dots - \lambda_n R_n} \right).$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \text{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \text{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Luego las condiciones vienen representadas por conjuntos convexos C_{R_i} y buscamos maximizar la entropía en el convexo $C_{max-ent}$,

$$C_{max-ent} := \bigcap_i C_{R_i}.$$

Caracterización geométrica

Caracterización geométrica

Cada condición $\langle R \rangle = r$ define un espacio linear $S \subseteq B(\mathcal{H})$ y los estados que la cumplen pertenecen a la intersección

$$C_R := \{\rho \in \mathcal{C} \mid \text{tr}(\rho R) = r\} = S \cap \mathcal{C}.$$

Luego las condiciones vienen representadas por conjuntos convexos C_{R_i} y buscamos maximizar la entropía en el convexo $C_{max-ent}$,

$$C_{max-ent} := \bigcap_i C_{R_i}.$$

Recordar

El problema MaxEnt está bien planteado (incluso en dimensión infinita).

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrías G y observables R_1, \dots, R_n determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= r_i, & \forall i = 1, \dots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, & \forall U \in G.\end{aligned}$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrías G y observables R_1, \dots, R_n determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= r_i, & \forall i = 1, \dots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, & \forall U \in G.\end{aligned}$$

Reducción Importante

$$U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrías G y observables R_1, \dots, R_n determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= r_i, & \forall i = 1, \dots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, & \forall U \in G.\end{aligned}$$

Reducción Importante

$$U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G \iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrías G y observables R_1, \dots, R_n determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= r_i, & \forall i = 1, \dots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, & \forall U \in G.\end{aligned}$$

Reducción Importante

$$\begin{aligned}U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G &\iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff \\ \text{tr}([\rho; iQ]P) = 0, \quad \forall P = P^\dagger, \forall Q &\iff\end{aligned}$$

Estados cuánticos invariantes

MaxEnt cuántico con simetrías

Dado un grupo de simetrías G y observables R_1, \dots, R_n determinar la matriz de densidad ρ que maximice la entropía de von Neumann $-\text{tr}(\rho \ln \rho)$ y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= r_i, & \forall i = 1, \dots, n, \\ U\rho U^\dagger &= \rho, & \forall U \in G.\end{aligned}$$

Reducción Importante

$$\begin{aligned}U\rho U^\dagger = \rho, \quad \forall U \in G &\iff [\rho; iQ] = 0, \quad \forall Q \in \mathfrak{g} \iff \\ \text{tr}([\rho; iQ]P) = 0, \quad \forall P = P^\dagger, \forall Q &\iff \langle [iQ; P] \rangle = 0, \quad \forall P \forall Q.\end{aligned}$$

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Ejemplo

Qubit

Queremos hallar $\hat{\rho} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ invariante por rotación sobre el eje z y tal que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a$,

$$Q = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\{P_1, \dots, P_4\} = \{\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, entonces las condiciones son

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a, \quad \langle [Q, P_2] \rangle = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = 0, \quad \langle [Q, P_3] \rangle = \langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0.$$

Ejemplo

Qubit

Queremos hallar $\hat{\rho} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ invariante por rotación sobre el eje z y tal que $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a$,

$$Q = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\{P_1, \dots, P_4\} = \{\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, entonces las condiciones son

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = a, \langle [Q, P_2] \rangle = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = 0, \langle [Q, P_3] \rangle = \langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0.$$

Luego de aplicar MaxEnt, obtenemos

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + a\hat{\sigma}_z \right).$$

Index

- 1 Medidas Clásicas
 - Problema de Rota
 - Caracterización de medidas
- 2 Medidas Cuánticas
 - Medidas Ortogonales
 - Caracterización de medidas
- 3 Método MaxEnt
 - MaxEnt
 - MaxEnt para estados cuánticos invariantes
 - Ejemplo: Qubit
- 4 Conclusiones

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.
- Esta reformulación admite acciones de grupo (simetrías espacio temporales) de manera natural.

Conclusiones

Conclusiones

- Toda teoría física probabilística (teoría estadística) admite una reformulación geométrica.
- Esta reformulación admite acciones de grupo (simetrías espacio temporales) de manera natural.
- El método MaxEnt se puede aplicar en total generalidad a estados cuánticos invariantes.

Gracias

Fin