

Dinámica de la estructura lógica de los sistemas cuánticos

Marcelo Losada

Universidad de Buenos Aires - CONICET, Buenos Aires, Argentina

5ta Jornada de Lógica, Computación e Información Cuántica

Universidad CAECE
Junio 2018 - Buenos Aires, Argentina

ESQUEMA DE LA CHARLA

- Estructura lógica de las propiedades clásicas
- Estructura lógica de las propiedades cuánticas
- Enfoque lógico del límite clásico
- Evoluciones no unitarias
 - Hamiltonianos no hermíticos
 - Canales cuánticos
 - Espacio de Hilbert equipado
- Conclusiones

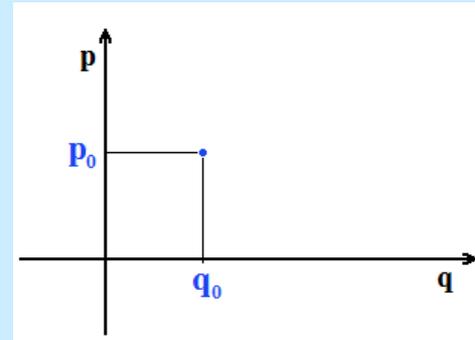
MECÁNICA CLÁSICA

1. **Sistema físico:** se representa con el espacio de fases (Γ)

MECÁNICA CLÁSICA

1. **Sistema físico:** se representa con el espacio de fases (Γ)
2. **Estados puros:** se representan por puntos en el espacio de fases

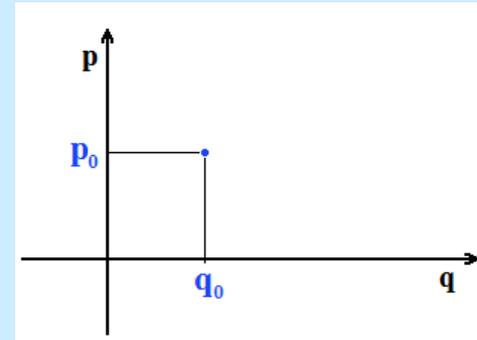
Single particle pure state
 (q_0, p_0)



MECÁNICA CLÁSICA

1. **Sistema físico:** se representa con el espacio de fases (Γ)
2. **Estados puros:** se representan por puntos en el espacio de fases

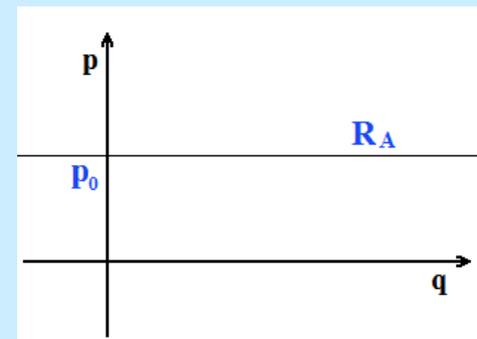
Single particle pure state
 (q_0, p_0)



3. **Propiedades:** se representan por subconjuntos medibles del espacio de fases

Propiedad A: la partícula tiene momento p_0

Se representa por el subconjunto R_A



El sistema tiene la propiedad A si el punto que representa su estado pertenece al subconjunto R_A

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo (\cup): Lattice

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo (\cup): Lattice

3- Existe elemento nulo (\emptyset) y universal (Γ): Lattice acotado

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo (\cup): Lattice

3- Existe elemento nulo (\emptyset) y universal (Γ): Lattice acotado

4- Conjunto de propiedades + inclusión

Lattice ortocomplementado

+ el complemento de conjuntos:

Complementation: $A \cap A^c = \emptyset \quad A \cup A^c = \Gamma$

Involution: $(A^c)^c = A$

Order-reversing: $A \subseteq B \longrightarrow B^c \subseteq A^c$

CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

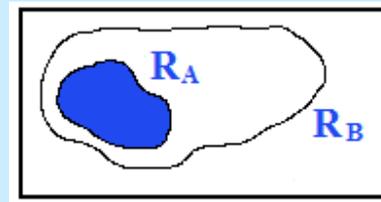
Estructura lógica del conjunto de propiedades

- Implicación: $A \Rightarrow B$

Order
 $A \leq B$



Inclusión

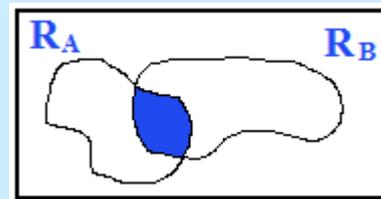


- Conjunción: A and B

Ínfimo
 $A \wedge B$



Intersección



CONJUNTO DE PROPIEDADES CLÁSICAS

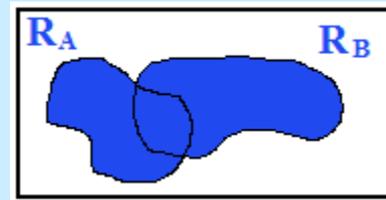
Estructura lógica del conjunto de propiedades

- Disyunción: $A \circ B$

Supremo
 $A \vee B$



Unión

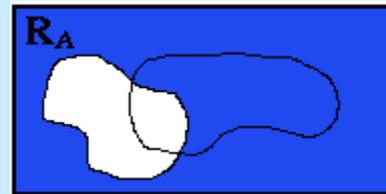


- Negación: $\text{No } A$

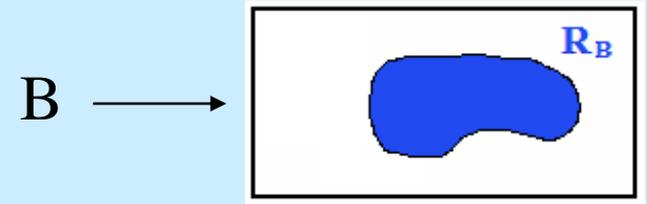
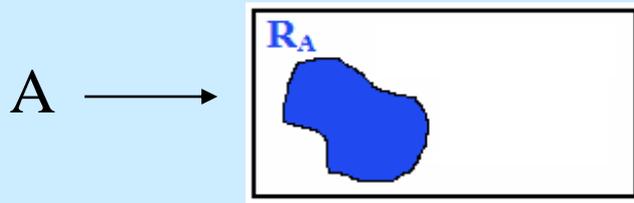
Negación
 $\neg A$



Complemento

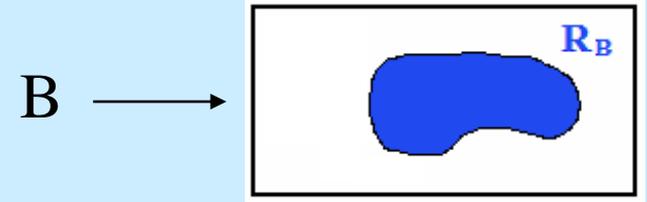
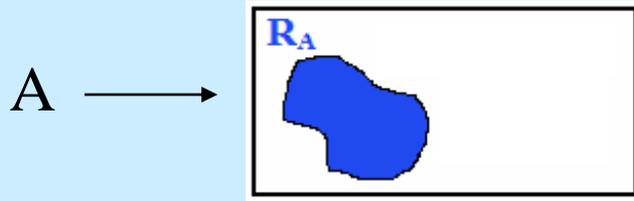


IGUALDAD DISTRIBUTIVA

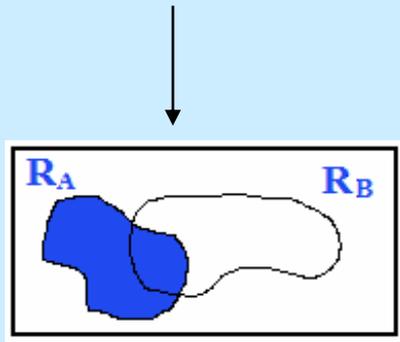
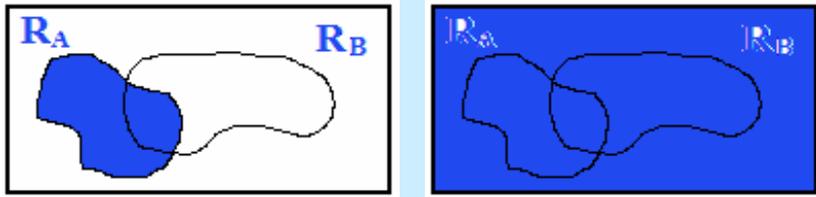


$$A \wedge (B \vee \neg B) = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

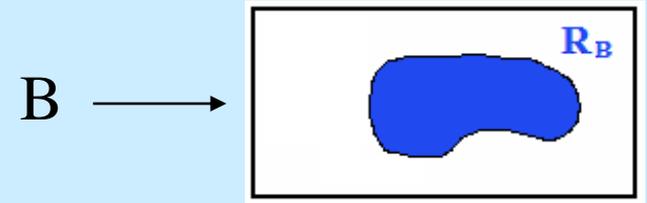
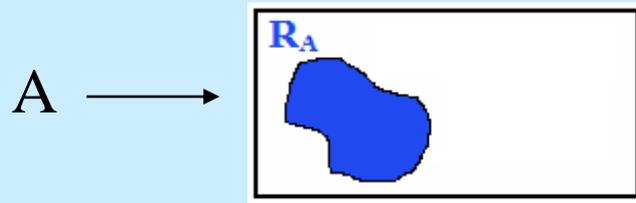
IGUALDAD DISTRIBUTIVA



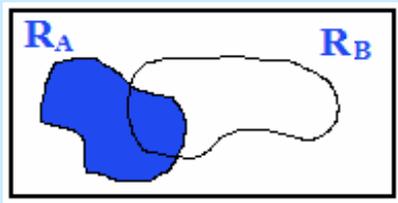
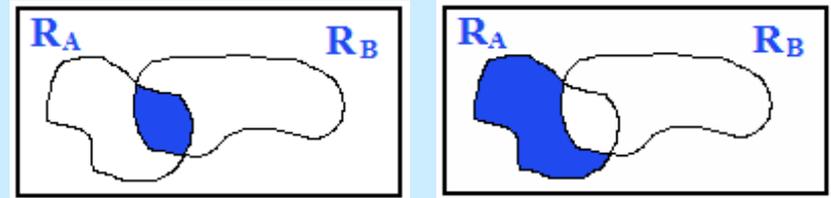
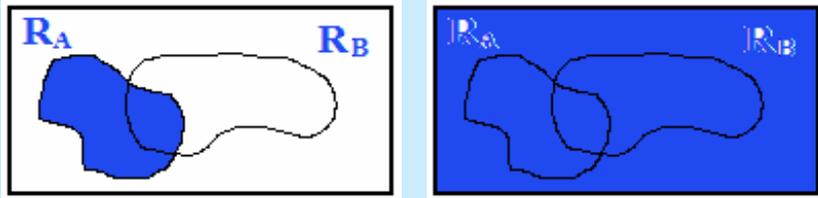
$$A \wedge (B \vee \neg B) = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$



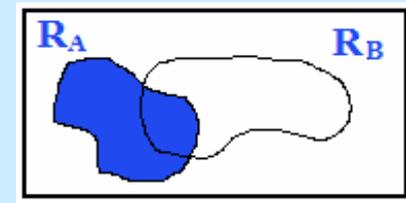
IGUALDAD DISTRIBUTIVA



$$A \wedge (B \vee \neg B) = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$



=



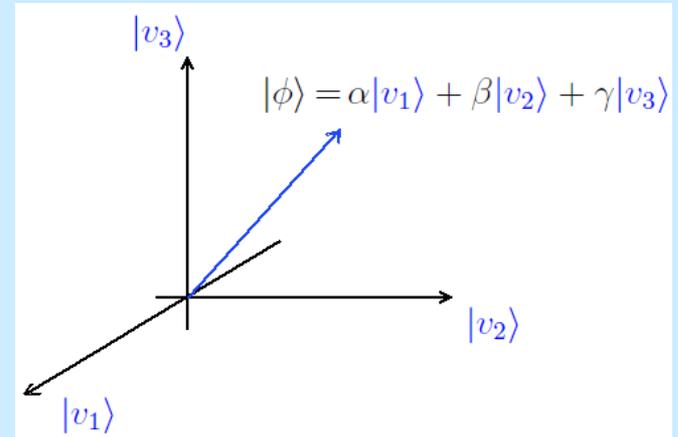
El conjunto de propiedades clásicas es una lógica booleana

MECÁNICA CUÁNTICA

1. **Sistema físico:** se representa con un espacio de Hilbert \mathcal{H}

MECÁNICA CUÁNTICA

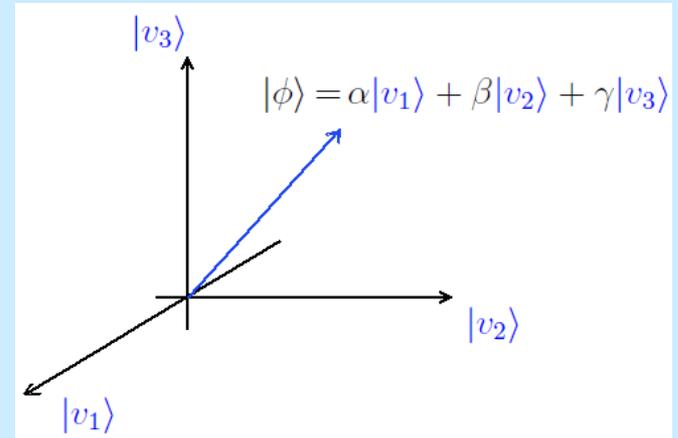
1. **Sistema físico:** se representa con un espacio de Hilbert \mathcal{H}
2. **Estados puros:** se representan por vectores normalizados de \mathcal{H}



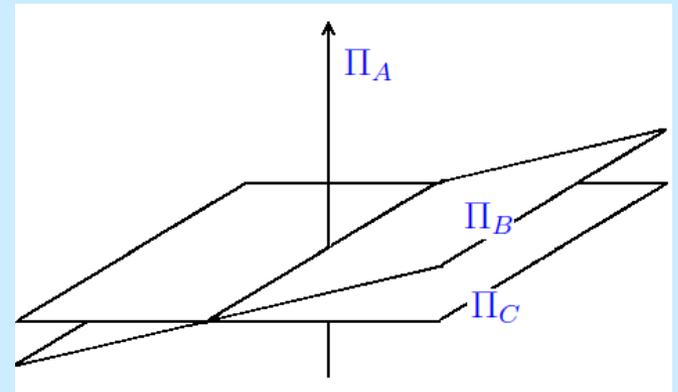
MECÁNICA CUÁNTICA

1. **Sistema físico:** se representa con un espacio de Hilbert \mathcal{H}

2. **Estados puros:** se representan por vectores normalizados de \mathcal{H}



3. **Propiedades:** se representan por subespacios cerrados de \mathcal{H} (o proyectores ortogonales)



El sistema tiene una propiedad con certeza si el vector que representa el estado pertenece al subespacio que representa a la propiedad.

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset

2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo (\cup): Lattice

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

- 1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset
- 2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo ($+$): Lattice
- 3- Existe elemento nulo ($\{0\}$) y universal (\mathcal{H}): Lattice acotado

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

Estructura reticular del conjunto de propiedades

- 1- El conjunto de propiedades + la inclusión (\subseteq): Poset
- 2- Existe un ínfimo (\cap) y un supremo ($+$): Lattice
- 3- Existe elemento nulo ($\{0\}$) y universal (\mathcal{H}): Lattice acotado
- 4- Conjunto de propiedades + inclusión
+ el complemento ortogonal: Lattice ortocomplementado

Complementation: $V \cap V^\perp = \{0\} \quad V + V^\perp = \mathcal{H}$

Involution: $(V^\perp)^\perp = V$

Order-reversing: $V \subseteq W \longrightarrow W^c \subseteq V^c$

CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

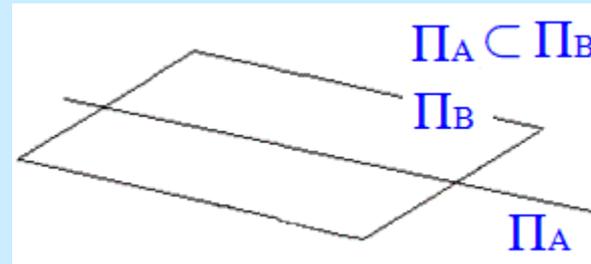
Estructura lógica del conjunto de propiedades

- Implicación: $A \Rightarrow B$

Orden
 $A \leq B$



Inclusión

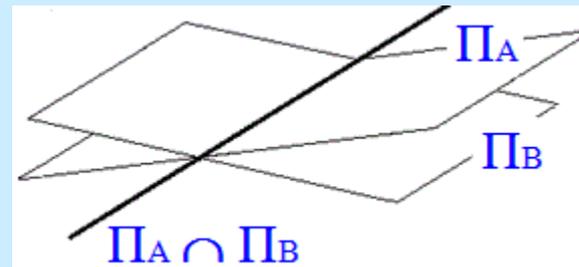


- Conjunción: $A \text{ y } B$

Ínfimo
 $A \wedge B$



Intersección



CONJUNTO DE PROPIEDADES CUÁNTICAS

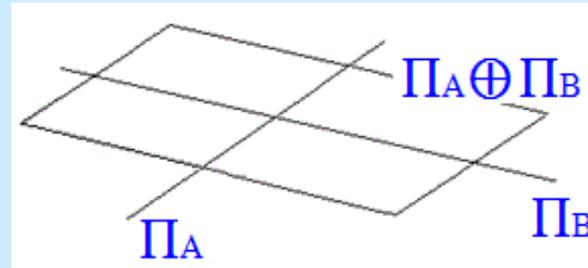
Estructura lógica del conjunto de propiedades

- Disyunción: $A \circ B$

Supremo
 $A \vee B$



Suma de subespacios
 \neq unión

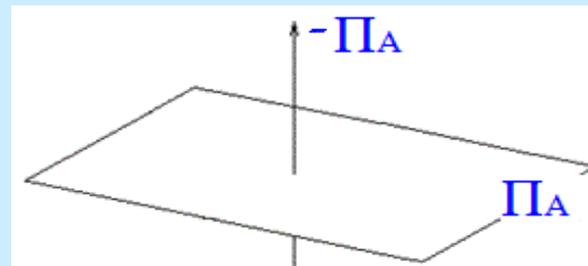


- Negación: $\text{No } A$

Negación
 $\neg A$

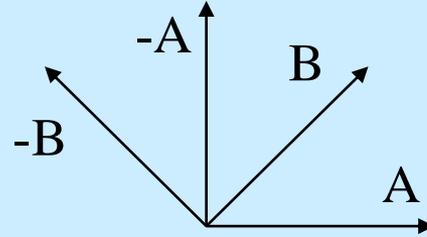


Complemento ortogonal
 \neq complemento



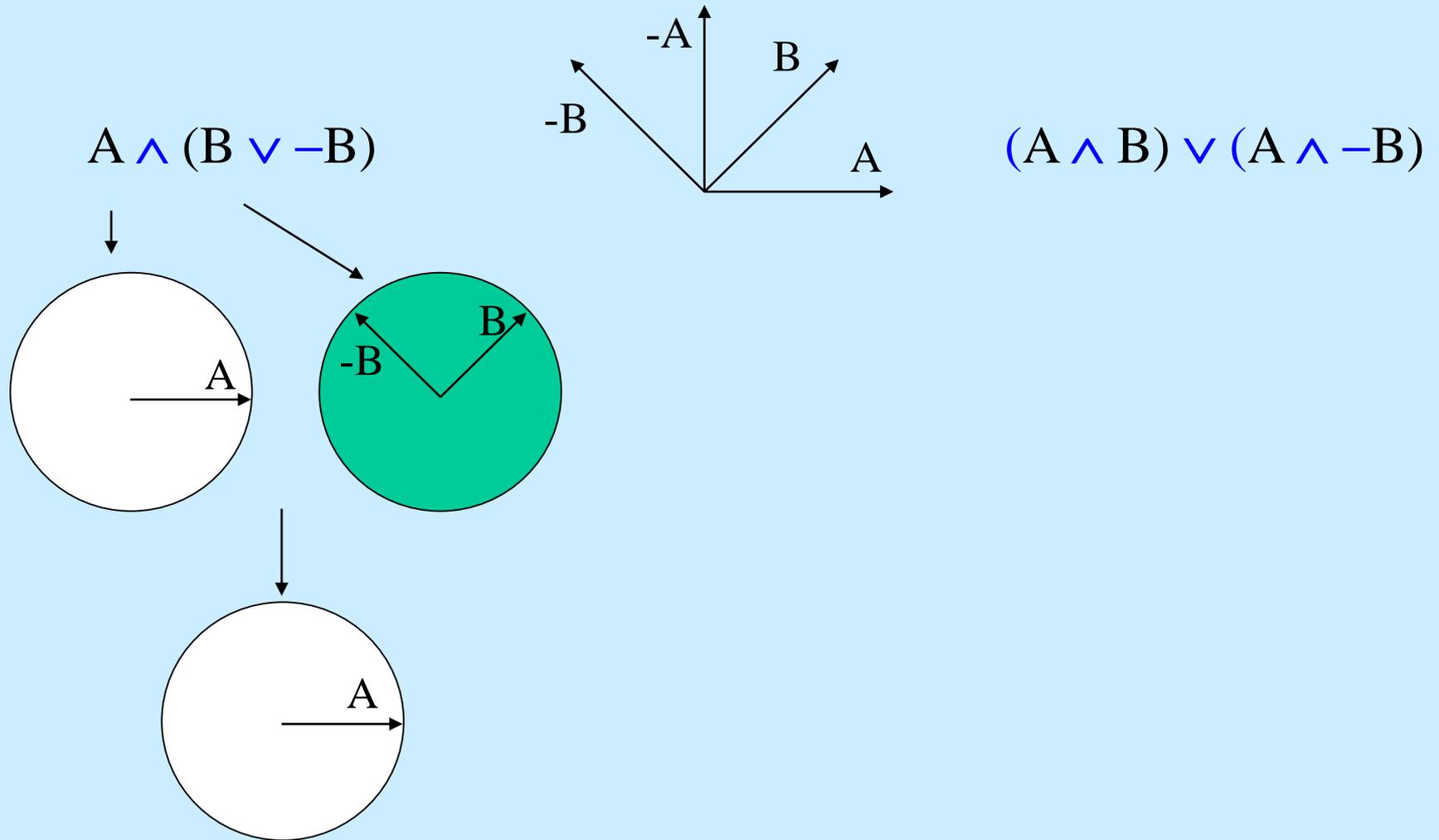
¿IGUALDAD DISTRIBUTIVA?

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

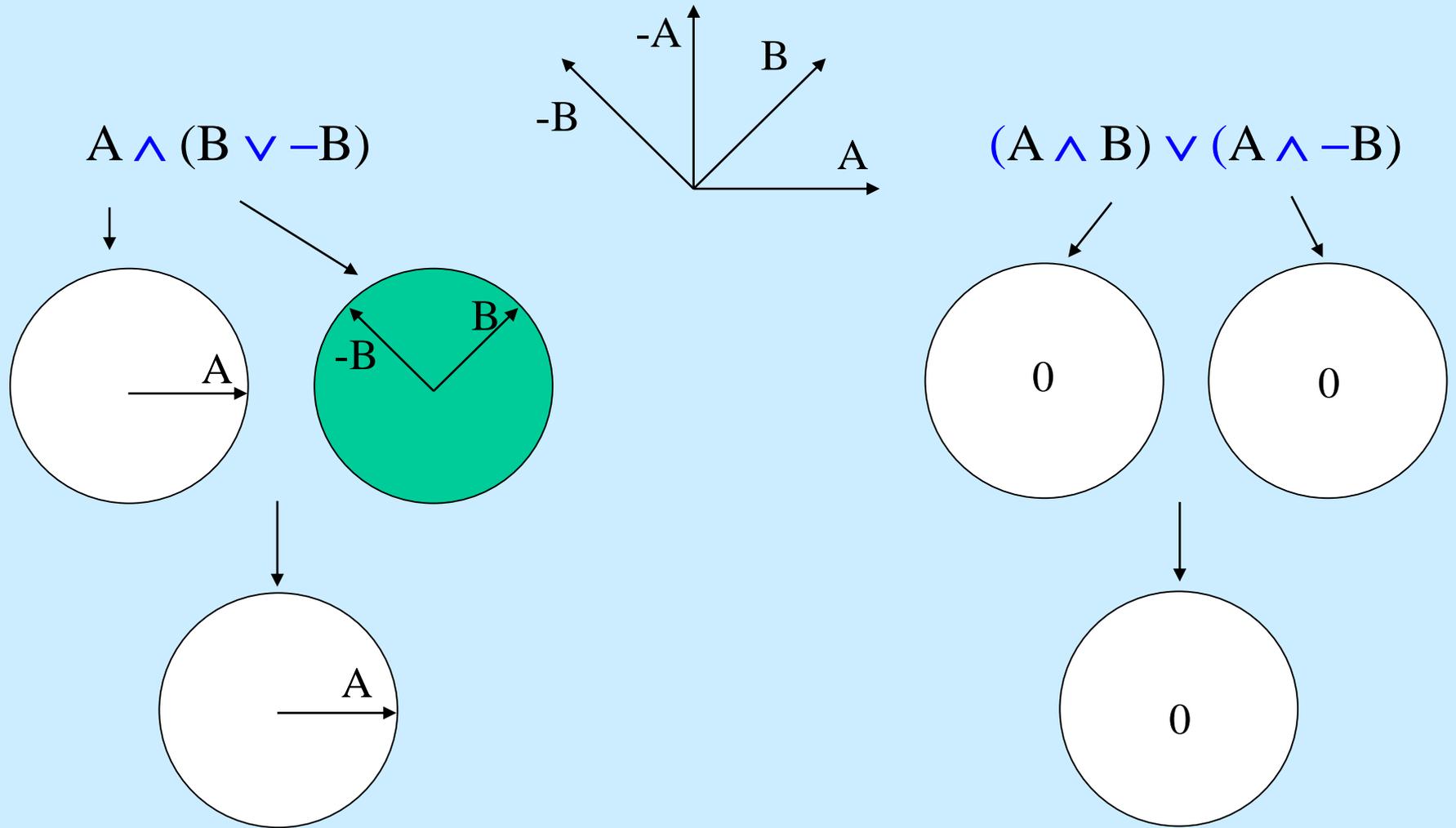


$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

¿IGUALDAD DISTRIBUTIVA?

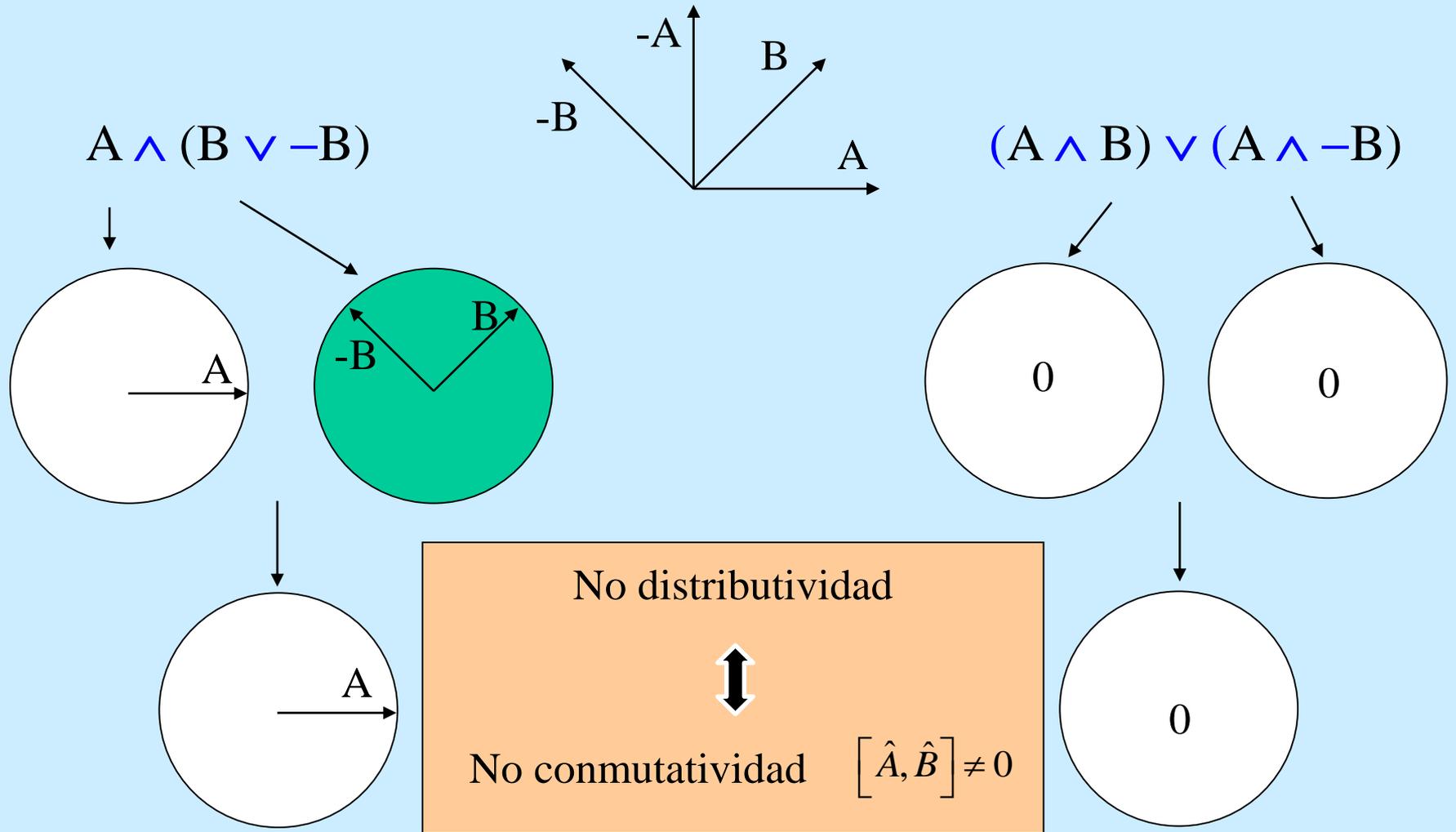


¿IGUALDAD DISTRIBUTIVA?



$$A \wedge (B \vee -B) \geq (A \wedge B) \vee (A \wedge -B)$$

¿IGUALDAD DISTRIBUTIVA?



$$A \wedge (B \vee -B) \geq (A \wedge B) \vee (A \wedge -B)$$

LÍMITE CLÁSICO

Si un sistema cuántico experimenta un proceso por el cual se vuelve clásico, entonces su estructura lógica cuántica debe pasar a ser clásica.

S. Fortin and L. Vanni, *Foundations of Physics*, 44, 1258-1268 (2014)

M. Losada, S. Fortin, F. Holik, *Int. J. Theor. Phys.* 57, 465 (2018)

LÍMITE CLÁSICO

Si un sistema cuántico experimenta un proceso por el cual se vuelve clásico, entonces su estructura lógica cuántica debe pasar a ser clásica.

S. Fortin and L. Vanni, *Foundations of Physics*, 44, 1258-1268 (2014)

M. Losada, S. Fortin, F. Holik, *Int. J. Theor. Phys.* 57, 465 (2018)

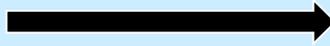
NON-BOOLEAN
LOGIC



BOOLEAN
LOGIC

NON – COMMUTATIVITY

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$



COMMUTATIVITY

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

LÍMITE CLÁSICO

Si un sistema cuántico experimenta un proceso por el cual se vuelve clásico, entonces su estructura lógica cuántica debe pasar a ser clásica.

S. Fortin and L. Vanni, *Foundations of Physics*, 44, 1258-1268 (2014)

M. Losada, S. Fortin, F. Holik, *Int. J. Theor. Phys.* 57, 465 (2018)

NON-BOOLEAN
LOGIC



BOOLEAN
LOGIC

NON – COMMUTATIVITY



COMMUTATIVITY

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

En la representación de
Schrödinger no hay evolución de
los observables



La estructura lógica de las
propiedades no evoluciona

Proponen describir la transición usando la representación Heisenberg

EVOLUCIÓN UNITARIA

Si se consideran evoluciones unitarias, el conmutador evoluciona unitariamente:

$$[\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t)] = U^\dagger [\hat{O}_1, \hat{O}_2] U = U^\dagger \hat{C} U$$

$$\hat{C}(0) \neq 0 \Rightarrow \hat{C}(t) \neq 0$$

Si dos observables no conmutan inicialmente, no conmutarán al final.

$$\hat{C}(0) = 0 \Rightarrow \hat{C}(t) = 0$$

Si dos observables conmutan inicialmente, conmutarán al final.

No puede haber transición de la estructura lógica

EVOLUCIONES NO UNITARIAS

Non-Hermitian evolutions:

$$\left[\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t) \right] = U^\dagger \hat{O}_1 U U^\dagger \hat{O}_2 U - U^\dagger \hat{O}_2 U U^\dagger \hat{O}_1 U$$

Fortin S., Holik F., Vanni L. (2016) Non-unitary Evolution of Quantum Logics. In: Non-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics. *Springer Proceedings in Physics*, doi.org/10.1007/978-3-319-31356-6_14

Quantum channels

$$\mathcal{E}_t(\hat{\rho}_0) = \sum_{\mu} \hat{E}_{\mu}(t) \hat{\rho}_0 \hat{E}_{\mu}^{\dagger}(t) \quad \sum_{\mu} \hat{E}_{\mu}^{\dagger}(t) \hat{E}_{\mu}(t) = \hat{I}$$

M. Losada, S. Fortin, M. Gadella, F. Holik, "Dynamics of algebras in quantum unstable systems", *International Journal of Modern Physics A*, en prensa.

EVOLUCIONES NO UNITARIAS

Rigged Hilbert space

Describir al sistema usando un espacio de Hilbert equipado
Los estados de Gamov evolucionan no unitariamente.

M. Losada, S. Fortin, M. Gadella, F. Holik, "Dynamics of algebras in quantum unstable systems", *International Journal of Modern Physics A*, en prensa.

En estos casos, si dos observables no conmutan al
inicio, pueden conmutar al final.

Es posible describir la transición desde una lógica
cuántica a una clásica.

SIMPLE EXAMPLE

Hamiltoniano no hermítico

Sistema de 2x2

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -i\gamma \end{pmatrix} \quad \hat{O} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} o_1 + o_2 & o_1 - o_2 \\ o_1 - o_2 & o_1 + o_2 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{H}, \hat{O}] = \frac{(o_1 - o_2)(\omega + i\gamma)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix} \quad \hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -i\gamma e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

$$\hat{O}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} o_1 + o_2 & (o_1 - o_2)e^{(i\omega - \gamma)t} \\ (o_1 - o_2)e^{-(i\omega + \gamma)t} & (o_1 + o_2)e^{-2\gamma t} \end{pmatrix}$$

SIMPLE EXAMPLE

Hamiltoniano no hermítico

Evolución del conmutador

$$\left[\hat{H}(t), \hat{O}(t) \right] = \frac{o_1 - o_2}{2} (\omega + i\gamma e^{-\gamma t}) e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \gg \frac{1}{\gamma}} 0$$

Desde un enfoque lógico:

$$\hat{H}(0), \hat{O}(0)$$



Proyectores de la descomposición
espectral generan una lógica no
booleana

$$\hat{H}(t), \hat{O}(t)$$



Proyectores de la
descomposición espectral
generan una lógica booleana

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Mapa de estados a estados: $\mathcal{E}_t(\hat{\rho}_0) = \hat{\rho}(t)$

- Lineal
- Completamente positivo
- Preserva la hermiticidad
- Preserva la traza

En función de los operadores de Kraus:

$$\mathcal{E}_t(\hat{\rho}_0) = \sum_{\mu} \hat{E}_{\mu}(t) \hat{\rho}_0 \hat{E}_{\mu}^{\dagger}(t) \quad \sum_{\mu} \hat{E}_{\mu}^{\dagger}(t) \hat{E}_{\mu}(t) = \hat{I}$$

En representación de Heisenberg : $\tilde{\mathcal{E}}_t(\hat{O}) = \hat{O}(t)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_t(\hat{O}) = \sum_{\mu} \hat{E}_{\mu}^{\dagger}(t) \hat{O} \hat{E}_{\mu}(t)$$



Mapa de observables a observables

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Amplitude damping channel:

- Modela el decaimiento de un átomo de dos niveles, debido a la emisión espontánea de un fotón.
- Apropiado para modelar los efectos del ruido cuántico.

$|0\rangle_A$
 $|1\rangle_A$ } Estados del átomo
(ground/excited state)

$|0\rangle_E$
 $|1\rangle_E$ } Estados del ambiente
(no emisión de fotón/
emisión de fotón)

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Amplitude damping channel:

- Modela el decaimiento de un átomo de dos niveles, debido a la emisión espontánea de un fotón.
- Apropiado para modelar los efectos del ruido cuántico.

$|0\rangle_A$
 $|1\rangle_A$ } Estados del átomo
(ground/excited state)

$|0\rangle_E$
 $|1\rangle_E$ } Estados del ambiente
(no emisión de fotón/
emisión de fotón)

Si el átomo está en el estado fundamental, no hay emisión de fotones y el átomo continúa en el estado fundamental.

$$|0\rangle_A |0\rangle_E \rightarrow |0\rangle_A |0\rangle_E$$

Si el átomo está en el estado excitado, hay una probabilidad p de que decaiga al estado fundamental y emita un fotón.

$$|1\rangle_A |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1-p} |1\rangle_A |0\rangle_E + \sqrt{p} |0\rangle_A |1\rangle_E$$

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Operadores de Kraus para
un tiempo τ :

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{(1-p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Operadores de Kraus para un tiempo τ :

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{(1-p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evolución de un operador O a un tiempo τ :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\tau(\hat{O}) = \hat{E}_0^\dagger \hat{O} \hat{E}_0 + \hat{E}_1^\dagger \hat{O} \hat{E}_1 = \begin{pmatrix} O_{00} & \sqrt{1-p} O_{01} \\ \sqrt{1-p} O_{10} & p O_{00} + (1-p) O_{11} \end{pmatrix}$$

Evolución de un operador O a un tiempo $n\tau$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n\tau}(\hat{O}) = \begin{pmatrix} O_{00} & \sqrt{(1-p)^n} O_{01} \\ \sqrt{(1-p)^n} O_{10} & (1-p)^n O_{11} + O_{00} [1 - (1-p)^n] \end{pmatrix}$$

ANOTHER SIMPLE EXAMPLE

QUANTUM CHANNELS

Operadores de Kraus para un tiempo τ :

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{(1-p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evolución de un operador O a un tiempo τ .

$$\tilde{\mathcal{E}}_\tau(\hat{O}) = \hat{E}_0^\dagger \hat{O} \hat{E}_0 + \hat{E}_1^\dagger \hat{O} \hat{E}_1 = \begin{pmatrix} O_{00} & \sqrt{1-p} O_{01} \\ \sqrt{1-p} O_{10} & p O_{00} + (1-p) O_{11} \end{pmatrix}$$

Evolución de un operador O a un tiempo $n\tau$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n\tau}(\hat{O}) = \begin{pmatrix} O_{00} & \sqrt{(1-p)^n} O_{01} \\ \sqrt{(1-p)^n} O_{10} & (1-p)^n O_{11} + O_{00} [1 - (1-p)^n] \end{pmatrix}$$

En el límite:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n\tau}(\hat{O}) \longrightarrow \begin{pmatrix} O_{00} & 0 \\ 0 & O_{00} \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

CONCLUSIONES

- ➔ Principal diferencia entre la lógica cuántica y la clásica es la no distributividad, que está conectada con la existencia de proyectores y observables que no conmutan.
- ➔ Si un sistema cuántico experimenta un proceso por el cual se vuelve clásico, entonces su estructura lógica cuántica debe pasar a ser clásica.
- ➔ Evoluciones unitarias no permiten este tipo de transiciones.
- ➔ Hamiltonianos no hermíticos, canales cuánticos y espacios de Hilbert equipados son alternativas para describir estas transiciones.

GRACIAS!