

# Entrelazamiento entre fermiones

---

N. Gigena, R. Rossignoli

Instituto de Física La Plata

# Entrelazamiento y LOCC



- Estados preparados con operaciones LOCC:  $\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ .

# Entrelazamiento y LOCC



- Estados preparados con operaciones LOCC:  $\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ .
- Si  $\rho_{AB} \neq \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B \implies \rho_{AB}$  entrelazado.

Entrelazamiento son aquellas correlaciones que no podemos generar preparando el estado con un protocolo LOCC.

## Entrelazamiento entre modos fermiónicos

En un sistema fermiónico no es posible operar localmente sobre las partículas, pero sí sobre conjuntos de modos de  $\mathcal{H}$

## Entrelazamiento entre modos fermiónicos

En un sistema fermiónico no es posible operar localmente sobre las partículas, pero sí sobre conjuntos de modos de  $\mathcal{H}$



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$$

# Entrelazamiento entre modos fermiónicos

En un sistema fermiónico no es posible operar localmente sobre las partículas, pero sí sobre conjuntos de modos de  $\mathcal{H}$



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$$



# Entrelazamiento entre partículas?



- El estado conjunto  $|\psi_{AB}\rangle$  será un Determinante de Slater.
- Como cada partícula se prepara localmente, el estado no puede estar entrelazado  
⇒ Los estados fermiónicos separables son determinantes de Slater.

# Entrelazamiento “de un cuerpo”

Sea  $|\psi\rangle$ ,  $P|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$  ( $P = \exp[i\pi N]$ ), un estado de un sistema fermiónico con espacio de una partícula  $\mathcal{H}$ , ( $\dim\mathcal{H} = n$ ).

## Entropía de entrelazamiento de un cuerpo

$$S^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = \text{Tr } h(\rho^{\text{SP}})$$

con  $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ ,  $\rho_{ij}^{\text{SP}} = \langle \psi | c_j^\dagger c_i | \psi \rangle$ , y  $\{c_k^\dagger | 0\rangle, k = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{H}$  una base de  $\mathcal{H}$ .

- Cuantifica entrelazamiento entre partículas:

$|\psi\rangle$  separable  $\iff$  es un determinante de Slater



... Pero también puede verse como una medida de entrelazamiento entre modos. Particionando una base cualquiera en la forma

$$\{c_i^\dagger, i = 1, \dots, n\} = \{c_k^\dagger\} \cup \{c_i^\dagger, k \neq i = 1, \dots, n\}$$

... Pero también puede verse como una medida de entrelazamiento entre modos. Particionando una base cualquiera en la forma

$$\{c_i^\dagger, i = 1, \dots, n\} = \{c_k^\dagger\} \cup \{c_j^\dagger, k \neq j = 1, \dots, n\}$$

### Entropía de entrelazamiento de un modo

$$E_k(|\psi\rangle) = -p_k \log_2(p_k) - p_{\bar{k}} \log_2(p_{\bar{k}})$$

... Pero también puede verse como una medida de entrelazamiento entre modos. Particionando una base cualquiera en la forma

$$\{c_i^\dagger, i = 1, \dots, n\} = \{c_k^\dagger\} \cup \{c_j^\dagger, k \neq i = 1, \dots, n\}$$

### Entropía de entrelazamiento de un modo

$$E_k(|\psi\rangle) = -p_k \log_2(p_k) - p_{\bar{k}} \log_2(p_{\bar{k}})$$

Sumando sobre  $k$  y minimizando sobre todas las bases  $\{c_i'^\dagger, i = 1, \dots, n\}$

### Entrelazamiento de un cuerpo

$$S^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = \text{Min}_{\{c_k'^\dagger\}} \sum_k E_k(|\psi\rangle)$$

Es posible entonces conectar el entrelazamiento de modos con el entrelazamiento de partículas, mediante un problema de optimización.

# Extensión a modos de cuasipartículas

Si  $a_i = \sum_j \bar{U}_{ji}c_j + V_{ji}c_j^\dagger$ , con  $UU^\dagger + WV^\dagger = 1$ ,  $UV^T + VU^T = 0$ .

## Entrelazamiento de un cuerpo generalizado

$$\text{Min}_a S_a = S^{\text{qSP}}(|\psi\rangle) = -\text{tr}' \rho^{\text{qSP}} \log_2 \rho^{\text{qSP}}$$

con

$$\rho^{\text{qSP}} = 1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\dagger & \mathbf{c} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \rho^{\text{SP}} & \kappa \\ -\bar{\kappa} & 1 - \bar{\rho}^{\text{SP}} \end{pmatrix},$$

donde  $\kappa_{ij} = \langle c_j c_i \rangle$ ,  $-\bar{\kappa}_{ij} = \langle c_j^\dagger c_i^\dagger \rangle$  y  $(1 - \bar{\rho}^{\text{SP}})_{ij} = \langle c_j c_i^\dagger \rangle$ .

$|\psi\rangle$  será separable sii es un determinante de Slater de cuasipartículas.

# El caso de 4 modos

## Estados impares

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^4 (\alpha_i c_i^\dagger |0\rangle + \bar{\beta}_i c_i |\bar{0}\rangle)$$

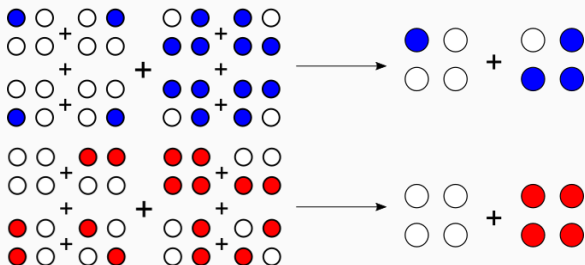
$$|\bar{0}\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger |0\rangle$$

## Estados pares

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |0\rangle + \bar{\beta}_1 |\bar{0}\rangle$$

$$+ \sum_{j=2}^4 (\alpha_j c_j^\dagger c_1^\dagger |0\rangle + \bar{\beta}_j c_1 c_j |\bar{0}\rangle)$$

## 4 modos: Entropía de entrelazamiento y concurrencia



Los autovalores de  $\rho^{\text{qsp}}$  están **cuádruplemente degenerados**

$$f_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(|\psi\rangle)}}{2}$$

La entropía de entrelazamiento es entonces

$$E(|\psi\rangle) = - \sum_{\nu=\pm} \left( \frac{1 + \nu \sqrt{1 - C^2(|\psi\rangle)}}{2} \right) \log \left( \frac{1 + \nu \sqrt{1 - C^2(|\psi\rangle)}}{2} \right)$$

Para estados de dos qubits distinguibles  $|\psi\rangle_{AB}$

$$C(|\psi\rangle_{AB}) = |\langle\psi_{AB}|\tilde{\psi}_{AB}\rangle|$$

Con el estado *dual* dado por  $|\tilde{\psi}_{AB}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi_{AB}^*\rangle$ .

Análogamente, para nuestro estado fermiónico  $|\psi\rangle$

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|$$

Con el estado dual dado por  $|\tilde{\psi}\rangle = T|\psi\rangle^*$ .

$$T = -\frac{1}{3!} \sum_{i,j,k,l} \epsilon_{ijkl} [c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_l + c_i^\dagger c_j c_k c_l]$$

## En estados mixtos

Para mezclas de la forma

$$\rho = \sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde  $\{q_i\}$  es una distribución de probabilidad y  $P|\psi_i\rangle = \pm|\psi_i\rangle$ , definimos la entropía de entrelazamiento como el techo convexo de  $S^{\text{qSP}}(|\psi\rangle)$

$$E^{\text{qSP}}(\rho) = 4h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}\right),$$

Con  $C(\rho)$  el techo convexo de  $C(|\psi\rangle) = |\langle\psi_{AB}|\tilde{\psi}_{AB}\rangle|$ , que puede determinarse analíticamente con el procedimiento de optimización de Wootters.



Como ejemplo consideremos el estado

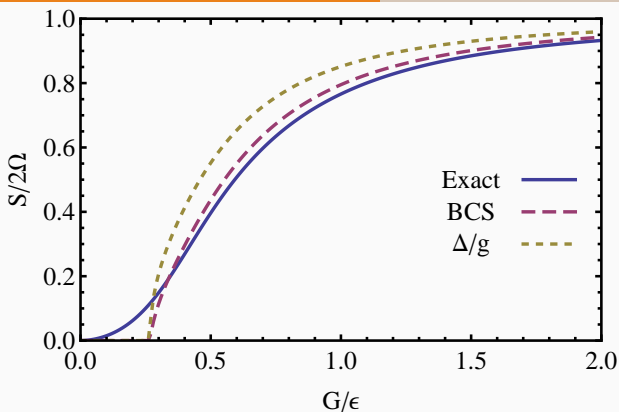
$$\rho = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)I_8/8; \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (1)$$

con  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger|0\rangle + c_1|\bar{0}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger + c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger)|0\rangle$ . Un cálculo directo usando las expresiones anteriores lleva a

$$C(\rho) = \text{Max} \left[ \frac{7p-3}{4}, 0 \right]$$

Indicando que el estado está entrelazado para  $p > 3/7$ , es decir, para  $q = \langle\psi|\rho|\psi\rangle = p + (1-p)/8 \geq \frac{1}{2}$ .

# Aplicación a un sistema superconductor



$S^{\text{SP}}(|\psi\rangle)$  para del estado fundamental del hamiltoniano

$$H = \sum_k \epsilon_k (c_k^\dagger c_k + c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}}) - \sum_{k \neq k'} G_{kk'} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{\bar{k}'} c_{k'},$$

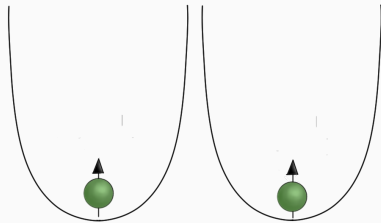
como función del acoplamiento  $G/\epsilon$  ( $2\Omega = 24$  modos), comparado con el resultado de BCS y el gap de BCS  $\Delta/g$ , con  $g = G\Omega/2$

# Entrelazamiento entre fermiones

---

# Entrelazamiento entre fermiones

Para dos espines 1/2, distinguibles:



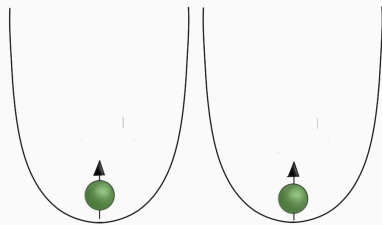
$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu, \nu = \uparrow, \downarrow} \alpha_{\mu\nu} |\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B,$$

↓

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\mu, \nu = \uparrow, \downarrow} \alpha_{\mu\nu} c_{A\mu}^\dagger c_{B\nu}^\dagger |0\rangle$$

# Entrelazamiento entre fermiones

Para dos espines 1/2, distinguibles:



$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu, \nu = \uparrow, \downarrow} \alpha_{\mu\nu} |\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B,$$

↓

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\mu, \nu = \uparrow, \downarrow} \alpha_{\mu\nu} c_{A\mu}^\dagger c_{B\nu}^\dagger |0\rangle$$

Espacio de una partícula

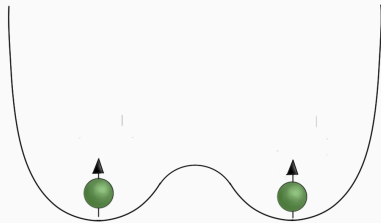
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B = \langle \{c_{A\uparrow}^\dagger, c_{A\downarrow}^\dagger\} \rangle \oplus \langle \{c_{B\uparrow}^\dagger, c_{B\downarrow}^\dagger\} \rangle$$

Matriz densidad de un cuerpo

$$\rho^{\text{SP}} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^\dagger & 0 \\ 0 & \alpha^T \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_A & 0 \\ 0 & \rho_B \end{pmatrix}$$

# Entrelazamiento entre fermiones

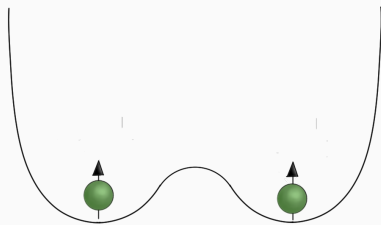
Si bajamos la barrera...



$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu\nu} |\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B,$$

# Entrelazamiento entre fermiones

Si bajamos la barrera...



$$\langle \psi \rangle_{AB} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu\nu} |\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B,$$

↓

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu\nu} c_{A\mu}^\dagger c_{B\nu}^\dagger |0\rangle$$

Base que diagonaliza a  $\rho^{\text{SP}}$ :

$$C = C'_A \cup C'_B = \{c_{A'0}^\dagger, c_{A'1}^\dagger\} \cup \{c_{B'0}^\dagger, c_{B'1}^\dagger\}$$

De manera que

$$\langle \hat{N}'_A \rangle = \langle \hat{N}'_B \rangle = 1$$

# Entrelazamiento entre fermiones

## Entrelazamiento fermiónico como entrelazamiento bipartito

Sea  $|\psi\rangle_f$  un estado **general** de un sistema con  $\dim(\mathcal{H}) = 4$ . La entropía de entrelazamiento de un cuerpo  $S(\rho^{\text{qSP}})$  cuantifica el entrelazamiento entre dos qubits distinguibles.

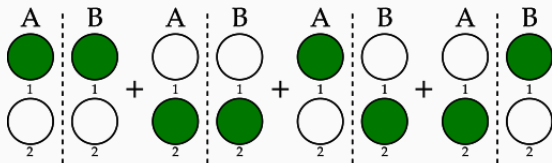


# Entrelazamiento entre fermiones

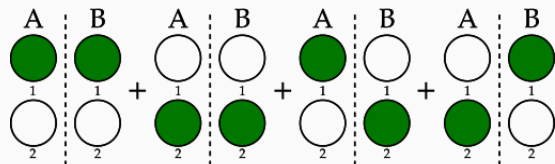
## Entrelazamiento fermiónico como entrelazamiento bipartito

Sea  $|\psi\rangle_f$  un estado **general** de un sistema con  $\dim(\mathcal{H}) = 4$ . La entropía de entrelazamiento de un cuerpo  $S(\rho^{\text{qSP}})$  cuantifica el entrelazamiento entre dos qubits distinguibles.

Es decir, dado  $|\psi\rangle_f$ ,  $\exists \mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B / \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ ;  $\hat{N}_A = \hat{N}_B = 1$ :



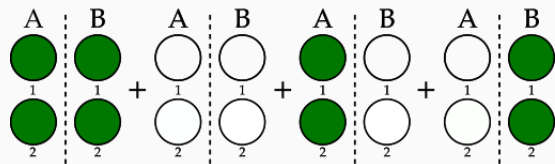
## 2 tipos de qubits



Estados  $|\psi_{-}\rangle_f$  de dos qubits de paridad local impar: Hay un fermión en cada partición.



$$c_{A2}^{\dagger} \leftrightarrow c_{A2}$$
$$c_{B2}^{\dagger} \leftrightarrow c_{B2}$$



Estados  $|\psi_{+}\rangle_f$  de dos qubits de paridad local par: Los dos modos pueden estar simultáneamente vacíos u ocupados.

Cualquier operación “local” en  $A$  o  $B$  puede expresarse en términos de operadores de Pauli si definimos ( $S = A, B$ )

### Paridad local impar

$$\sigma_{Sx} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow} + c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\uparrow}$$

$$\sigma_{Sy} = -i(c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow} - c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\uparrow})$$

$$\sigma_{Sz} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\uparrow} - c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\downarrow}$$

$$[\sigma_{Sj}, \sigma_{S'k}] = 2i\delta_{SS'}\epsilon_{jkl}$$

$$\sigma_{Sj}^2|\psi_{-}\rangle_f = |\psi_{-}\rangle_f$$

### Paridad local par

$$\tilde{\sigma}_{Sx} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger + c_{S\downarrow} c_{S\uparrow}$$

$$\tilde{\sigma}_{Sy} = -i(c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger - c_{S\downarrow} c_{S\uparrow})$$

$$\tilde{\sigma}_{Sz} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\uparrow} + c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\downarrow} - 1$$

$$[\tilde{\sigma}_{Sj}, \tilde{\sigma}_{S'k}] = 2i\delta_{SS'}\epsilon_{jkl}$$

$$\tilde{\sigma}_{Sj}^2|\tilde{\psi}_{+}\rangle_f = |\tilde{\psi}_{+}\rangle_f$$

Verificándose además  $[\sigma_{Sj}, \tilde{\sigma}_{S'j}] = 0$  y  $\sigma_{Sj}|\tilde{\psi}_{+}\rangle_f = \tilde{\sigma}_{Sj}|\psi_{-}\rangle_f = 0$ .

Si  $AB$  es una partición arbitraria:

$$|\psi\rangle_f = \sqrt{p_-} |\psi_-\rangle_f + \sqrt{p_+} |\psi_+\rangle_f$$

The diagram shows the decomposition of a state  $|\psi\rangle_f$  into two components. Each component is a sum of two terms. The first component,  $\sqrt{p_-} |\psi_-\rangle_f$ , has terms where both subsystems A and B are in state 1 (green circles) and both are in state 2 (white circles). The second component,  $\sqrt{p_+} |\psi_+\rangle_f$ , has terms where both subsystems A and B are in state 1 (green circles) and both are in state 2 (white circles). Each subsystem A and B is represented by two circles labeled 1 and 2, separated by a vertical dashed line.

Entrelazamiento de la partición:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = p_- S(\rho_A^-) + p_+ S(\rho_A^+) + S(p)$$

Si  $AB$  es una partición arbitraria:

$$|\psi\rangle_f = \sqrt{p_-}|\psi_-\rangle_f + \sqrt{p_+}|\psi_+\rangle_f$$

Entrelazamiento de la partición:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = p_-S(\rho_A^-) + p_+S(\rho_A^+) + S(p)$$

### Mínimo entrelazamiento entre particiones

Sea  $|\psi\rangle_f$  un estado de paridad definida, de un sistema con  $\dim(\mathcal{H}) = 4$ , y  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$  una partición arbitraria de  $\mathcal{H}$ . La entropía de entrelazamiento asociada a tal partición satisface

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \geq \frac{1}{4}S(\rho^{\text{qsp}})$$

# Superdense coding

Estados de Bell:

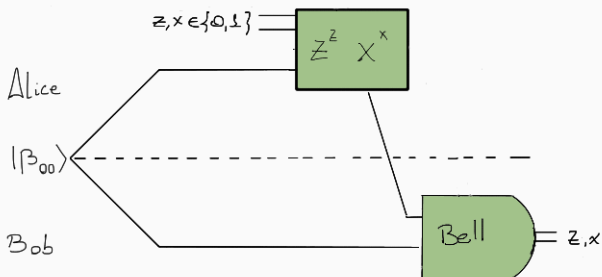
$$|\beta_{zx}\rangle = \frac{|0, x\rangle + (-1)^z |1, \bar{x}\rangle}{\sqrt{2}}$$

Estos constituyen una base y verifican

$$|\beta_{zx}\rangle = (Z^z X^x \otimes I) |\beta_{00}\rangle = (I \otimes X^x Z^z) |\beta_{00}\rangle$$

↓

## Superdense Coding



Estados de Bell fermiónicos con paridad local impar,  $|\beta_{00}\rangle$ , y con paridad local par  $|\tilde{\beta}_{00}\rangle$  pueden usarse implementar el protocolo estándar.

Consideremos ahora el estado recurso

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{00}\rangle + |\tilde{\beta}_{00}\rangle)$$

Con las operaciones usuales (para las dos paridades simultáneamente)

$$|\psi_{ij}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{ij}\rangle + |\tilde{\beta}_{ij}\rangle), i, j = 0, 1.$$

Pero implementando una operación de detección de paridad local  $P^A = -\exp[i\pi N_A]$

$$|\psi_{ij}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{ij}\rangle - |\tilde{\beta}_{ij}\rangle), i, j = 0, 1.$$

Podemos entonces utilizar el estado para **enviar 3 bits, implementando solo operaciones locales sobre el mismo conjunto de modos.**

# Conclusiones

---



## Resumen y conclusiones

- Definimos una medida de entrelazamiento “entre partículas” en sistemas de fermiones, el entrelazamiento de un cuerpo, que puede verse también como el mínimo de una medida entre modos de una base de  $\mathcal{H}$ .
- En el caso  $\dim\mathcal{H} = 4$  el entrelazamiento de un cuerpo cuantifica, de hecho, entrelazamiento entre dos qubits distinguibles. Esta cantidad es además una cota para el entrelazamiento entre particiones arbitrarias de  $\mathcal{H}$ .
- La invariancia frente a transformaciones de Bogoliubov permite definir dos tipos de qubits en función de la paridad local. Un estado general, en una partición arbitraria, es entonces superposición de estados de estos dos qubits. El uso de una de estas superposiciones como recurso en el protocolo de Superdense Coding habilita el envío de 3 bits con solo dos modos locales.

Muchas Gracias!

Preguntas?